Διάλεξη 8η

17/04/2019

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ.

Μέθοδος Ροπών: Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από πληθ. $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$, όπου $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r) \subset \mathbb{R}^n$

Πληθυσμιακές ροπές: $\mu_k = E(X^k) \overset{\text{ορ}}{=} \begin{cases} \int x^k f(x,\theta)dx, & X \text{ συνεχής} \\ \sum_x x^k f(x,\theta), & X \text{ διακ.} \end{cases} =$

$= \mu_k(\theta) = \mu_k(\theta_1, \dots, \theta_r)$

Δειγματικές Ροπές: $m_k \overset{\text{ορ}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$, $k = 1, 2, \dots$ (π.χ. $m_1 = \bar{X}$)

Για τις πληθυσμιακές ροπές και τις δειγματικές ισχύουν τα εξής:

① $E(m_k) = \mu_k$, $\forall k = 1, 2, \dots$

Απόδ

$E(m_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int x_i^k f(x_i, \theta) dx_i$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_k = \frac{1}{n} n \mu_k = \mu_k$ //

② $m_k \xrightarrow[n \to \infty]{P} \mu_k$, $\forall k = 1, 2, \dots$ (κ ευστοί ταυτότητα)

(Αυτό αποδεικνύεται με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών.)

Τα ① κ' ② μαζί δίνουν ότι: $\boxed{\mu_k \simeq m_k, \ \forall k = 1, 2, \dots}$

(*) Εάν $\mu_k = m_k$, $\forall k = 1, 2, \dots$ έχω φτιάξει κάποιες εξισώσεις. Συγκεκριμένα n εξισώσεις με r αγνώστους. Τόσες εξισώσεις όσες και οι παράμετροι που έχω!

Μέθοδος: Επιλύω σ/η των $\mu_k(\theta_1,\dots,\theta_r) = m_k$, για $k=1,\dots,r$

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $x_1,\dots,x_n$ από $N(\mu,\sigma^2)$,
μ,σ^2: άγνωστα. Να βρεθούν οι εκτιμητές ροπών των μ,σ^2.

Λύση

Οι εκτιμητές ροπών των μ και σ^2 θα βρεθούν από την λύση: $\mu_1 = m_1$

$$\mu_2 = m_2.$$

Θα λύσω σε $\mu_1 \overset{ορ.}{=} E(X) = \mu.$

$$\mu_2 \overset{ορ.}{=} E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

Έτσι
$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 = m_1 \overset{ορ.}{=} \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x} \\ &\sigma^2 + \mu^2 \overset{ορ.}{=} \frac{1}{n}\sum x_i^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2. \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ Άρα οι εκτιμητές ροπών των μ,σ^2 είναι $\tilde{\mu} = \bar{x}$.

και $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2.$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι εκτ. ροπών συμπίπτουν με ΕΜΠ.

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $U(0,\theta)$.
Να βρεθούν οι εκτιμητές ροπών της θ.

Λύση

Οι εκτιμητές ροπών της θ, θα προκύψει από την λύση $\mu_1 = m_1$.

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= E(X) = \frac{\theta+0}{2} = \frac{\theta}{2} \\ m_1 &= \frac{1}{n}\sum X_i = \bar{X} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \bar{X} \Rightarrow \theta = 2\bar{X}.$$

Άρα ο εκτιμητής ροπής της θ θα είναι $\tilde{\theta} = 2\bar{X}$.
Ο ΕΜΠ $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$.

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $G(\alpha,\beta)$.
Να βρεθούν οι εκτιμητές ροπών των α,β.

Λύση

Οι εκτιμητές ροπών α,β θα προκύψουν από λύση ως προς α,β των εξισώσεων.

$$\mu_1 = m_1 = \frac{1}{n}\sum X_i = \bar{X}.$$

$$\mu_2 = m_2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2$$

$$\mu_1 = E(X) = \alpha\beta$$

$$\mu_2 = E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2 = \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2$$

Προκύπτει από τα παραπάνω ότι
$$\left.\begin{aligned} \alpha\beta &= \bar{X}. \\ \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 &= \frac{1}{n}\sum X_i^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2}} \quad \text{και} \quad \boxed{\tilde{\beta} = \frac{\frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2}{\bar{X}}}$$

(*) Θυμάμαι ότι οι ΕΜΠ $\nexists$ σε αναλυτική μορφή.

▶ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο :

Διαστήματα Εμπιστοσύνης:

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από πληθυσμό $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$.
Μελετήσαμε έως τώρα την εκτίμηση σε σημείο. Προσδιορίσαμε και προσδιορίζαμε μια στατιστική συνάρτηση, ίσως $T=T(X_1,\dots,X_n)$ η οποία εκτιμά (προσεγγίζει) την άγνωστη παράμετρο θ.

__Π.χ__: Αν το $X_1,\dots,X_n$ είναι από $N(\mu,\sigma^2)$ το $\bar{X}$ είναι - ΑΟΕΔ, ΕΜΠ, ρσπω - της μ.

__Ορισμός__: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. και $L=L(\underline{X})$ και $U=U(\underline{X})$ 2 στατιστικές συναρτήσεις με $L<U$. Το δ.ε. για την παράμετρο θ (ή γενικότερα για $g(\theta)$) με βαθμό εμπιστοσύνης (β.ε) $100(1-\alpha)\%$. ορίζεται:

$$\boxed{P(L(\underline{X})<\theta<U(\underline{X}))=1-\alpha,} \quad 0<\alpha<1.$$

__Παρατηρήσεις__: α) Το α επιλέγεται στην πράξη και είναι $\alpha=0{,}05$ ή $0{,}01$ ή $0{,}1$.

β) Αν $x_1,\dots,x_n$ είναι η παρατηρούμενη τιμή του τ.δ. $X_1,\dots,X_n$, τότε το $(1-\alpha)100\%$ δ.ε. για την θ είναι το $(L(\underline{x}),U(\underline{x}))$ και η ερμηνεία του δ.ε. είναι η εξής:
« Αν επαναλάβω την δειγματοληψία 100 φορές περίπου $100(1-\alpha)\%$ φορές η άγνωστη θ να βρίσκεται στο $(L(\underline{X}),U(\underline{X}))$ »

γ) Ίσως μπορεί να βρω περισσότερες του ενός δ.ε. για την θ (ή την $g(\theta)$) με β.ε. $100(1-\alpha)\%$.

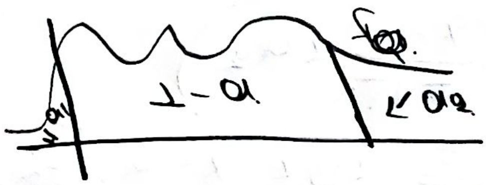
Ποιο από αυτά είναι το καλύτερο;
(Εκείνο που έχει το μικρότερο μήκος.

Ερώτημα: Πως μπορώ να κατασκευάσω δ.ε.;
Απάντηση: Μέθοδος αντιστρεπτής ποσότητας.

Ορισμός: (Αντιστρεπτής ποσότητας)
Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από πληθυσμό $f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$.
Ονομάζουμε αντιστρεπτή ποσότητα κάθε συνάρτηση $Q=Q(\underline{X},\theta)$ του τ.δ. $\underline{X}=(X_1,\dots,X_n)$ και της παραμέτρου θ. που η κατανομή της Q δεν εξαρτάται από την θ.

Περιγραφή της μεθόδου της αντιστρεπτής ποσότητας:

Έστω $Q=Q(\underline{X},\theta)$ η αντιστρεπτή ποσότητα και έστω f_Q η κατανομή της Q η οποία f_Q δεν εξαρτάται από το θ.



Αφού f_Q η κατανομή της Q και αφού η Q είναι αντιστρεπτή, $\exists\, q_1,q_2$ ανεξάρτητα της Θ με $q_1<q_2$ και τ.ω.

$$P(q_1<Q<q_2)=\int_{q_1}^{q_2} f_Q(q)\,dq=1-\alpha,\quad 0<\alpha<1.$$

Βήμα 2: $1-\alpha = P(q_1 < Q(\underline{X},\theta) < q_2)$

(*) Εάν μπορώ να λύσω την ανισότητα ως προς θ, θα καταλήξω: $\underbrace{1-\alpha = P(L<\theta<U)}$

↑

Εφόσον φτάσω εδώ, τότε από ορισμό δ.ε. το (L,U) είναι το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για θ.

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $N(\mu,\sigma^2)$, όπου σ^2: γνωστό. Να βρεθεί το $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την μ.

Λύση

Θεωρώ $Q = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ και γνωρίζω ότι η οποία $N(0,1)$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 \cdot x^2}\right)$ δεν εξαρτάται από το μ.

Άρα η $Q \sim N(0,1)$ είναι αντιστρεπτή ποσότητα.

Αφού Q αντιστρεπτή $\exists\, q_1, q_2$ με $q_1<q_2$ με: $-\infty<q_1<q_2<+\infty$ τ.ω.

$P(q_1 < Q < q_2) = 1-\alpha \Rightarrow$

$$1-\alpha = P(q_1<Q<q_2) = P\left(q_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2\right)$$

$$= \underbrace{P\left(\bar{X}-q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}-q_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}_{\parallel \; (*)}$$

Από την (*) και τον ορισμό του δ.ε. είναι $100(1-\alpha)\%$ δ.ε. για την μ είναι:

$\left(\bar{X}-q_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+q_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ } Υπάρχουν πολλά τέτοια q_1, q_2 που δίνουν δε δ.ε. για την μ. Καλύτερο απ' αυτά είναι εκείνο που έχει ελάχιστο μήκος.

Τώρα θα βρω το διάστημα κ' το ελάχιστο μήκος ή αλλιώς τα q_1, q_2 με $q_1 < q_2$ και $\int_{q_1}^{q_2} f_Q(q)\,dq = 1-a$ που οδηγούν σε δ.ε ελάχ. μήκους.

Μαθηματικά δηλαδή θέλω να ελαχιστοποιήσω το μήκος $l = \bar{x} - q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - q_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ή $l = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(q_2 - q_1)$

υπό το $\int_{q_1}^{q_2} f_Q(q)\,dq = 1-a$ ή, επειδή $Q \sim N(0,1)$

$$\int_{q_1}^{q_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot q^2}\, dq = \Phi(q_2) - \Phi(q_1) = 1-a$$

(*) Ζητώ ελαχιστοποίηση ως προς q_1, q_2 του $l = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(q_2 - q_1)$ υπό $\Phi(q_2) - \Phi(q_1) = 1-a$.

Οπότε $$\frac{dl}{dq_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1\right) \quad (1)$$

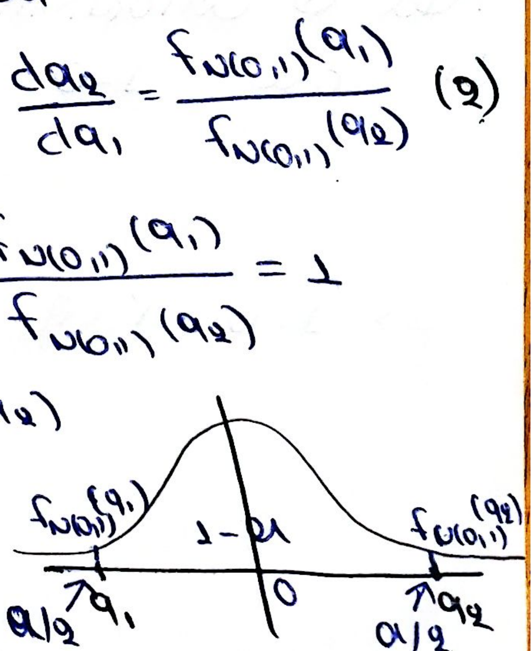
$$\frac{d}{dq_1}\left(\Phi(q_2) - \Phi(q_1)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dq_2}{dq_1}\frac{d\Phi(q_2)}{dq_2} - \frac{d}{dq_1}\Phi(q_1) = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} f_{N(0,1)}(q_2) = f_{N(0,1)}(q_1)$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_{N(0,1)}(q_1)}{f_{N(0,1)}(q_2)} \quad (2)$$

Από (1) κ' (2): $\frac{dl}{dq_1} = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = 1 \Rightarrow \frac{f_{N(0,1)}(q_1)}{f_{N(0,1)}(q_2)} = 1$

$$\Rightarrow f_{N(0,1)}(q_1) = f_{N(0,1)}(q_2)$$



Επιπλέον $P(N(0,1) > q_2) = a/2$

$\Updownarrow$

από ορισμό αντίστοιχων εκατοστιαίων σημείων της $N(0,1)$

$q_2 = z_{a/2}$.

Οπότε $q_1 = -q_2 = -z_{a/2}$.

Το δ.ε. για την μ ελάχιστου μήκους προκύπτει από το $\left(\bar{x} - q_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

για $q_2 = z_{a/2}$ και $q_1 = -z_{a/2}$ είναι:

$$\left(\bar{x} - z_{a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω τ.δ.: $X_1, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2: άγνωστο. Να κατασκευαστεί δ.ε. για μ με β.ε. $100(1-a)\%$.

<u>Λύση</u>

Αντιστρέψιμη ποσότητα: $Q = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

και της Q, δηλαδή η t_{n-1}, δεν περιέχει το μ.

Αφού Q αντιστρέψιμη, $\exists\ q_1, q_2$, $-\infty < q_1 < q_2 < +\infty$, ανεξ. της μ. τ.ω.: $1-a = P(q_1 < Q < q_2) = \int_{q_1}^{q_2} f_{t_{n-1}}(q)\,dq$

$$\Rightarrow 1-a = P(q_1 < Q < q_2) = P\left(q_1 < \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} < q_2\right)$$

$$= P\left(\bar{x} - q_2 \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} - q_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

Από ορισμό του δ.ε., ένα δ.ε για το μ με β.ε. $100(1-a)\%$ είναι το $\left(\bar{x}-q_2\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x}+q_1\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

Αναζητώ δ.ε. με ελαχ. μήκος, δηλ. αναζητώ q_1, q_2 που ελαχ. το $l=\frac{s}{\sqrt{n}}(q_2-q_1)$ υπό

$$1-a=\int_{q_1}^{q_2} f_{t_{n-1}}(q)dq \text{ ή } 1-a=F_{t_{n-1}}(q_2)-F_{t_{n-1}}(q_1) \quad (*)$$

$$\frac{dl}{dq_1}=\frac{s}{\sqrt{n}}\left(\frac{dq_2}{dq_1}-1\right)$$

Από την $(*)$: $\frac{d}{dq_1}\left(F_{t_{n-1}}(q_2)-F_{t_{n-1}}(q_1)\right)=0$

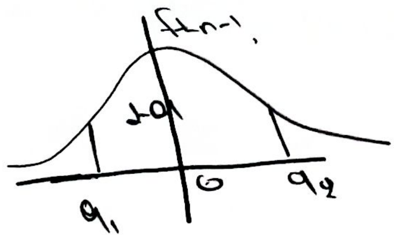
$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1}\frac{dF_{t_{n-1}}(q_2)}{dq_2}-\frac{d}{dq_1}F_{t_{n-1}}(q_1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1}f_{t_{n-1}}(q_2)-f_{t_{n-1}}(q_1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1}=\frac{f_{t_{n-1}}(q_1)}{f_{t_{n-1}}(q_2)} \quad (**)$$

Από την $(**)$: $\frac{dl}{dq_1}=0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1}=1$

$$\Rightarrow \frac{f_{t_{n-1}}(q_1)}{f_{t_{n-1}}(q_2)}=1 \Rightarrow \boxed{f_{t_{n-1}}(q_1)=f_{t_{n-1}}(q_2)}$$



Για να ικανοποιείται αυτό θα πρέπει $q_1 = -q_2$.

Άρα $P(t_{n-1} > q_2) = a/2$.

$q_2 = t_{n-1, a/2}$.

Άρα τα q_1, q_2 που ελαχιστοποιούν το μήκος ℓ είναι $q_2 = t_{n-1, a/2}$, $q_1 = -t_{n-1, a/2}$.

Άρα το δ.ε. για την μ. με β.ε. $100(1-a)\%$ ελαχίστου μήκους είναι:

$$\left(\bar{X} - t_{n-1, a/2} \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{n-1, a/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right).$$